УДК 519.21

ПОГЛИБЛЕННЯ НЕРІВНОСТІ ВИСОЧАНСЬКОГО-ПЕТУНІНА ДЛЯ РОЗПОДІЛУ СІМПСОНА

Латій Яна, Макарчук Олег

Науковий керівник: канд.ф.-м. наук, доцент Макарчук О.П.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет

імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький Україна

Стаття присвячена перевірці та поглибленню нерівності Височанського-Петуніна для трикутного розподілу Сімпсона. Здійснюється покращення оцінок типу Височанського-Петуніна як в плані діапазону дії нерівності(він розширений до всіх додатних значень) так і по відношенню до корегуючої сталої $\frac{4}{9}$.

Ключові слова: нерівність Височанського-Петуніна, щільність розподілу, абсолютно неперервний, функція розподілу, центрування, нормування.

DEVELOPMENT OF VYSOCHANSKY-PUTUNINE FOR SYMPSON DISTRIBUTION

Latyi Yana, Makarchuk Oleg

Scientific adviser: Ph.D. Sciences, associate professor Makarchuk O.P.

Central Ukrainian State Pedagogical University

named after Volodymyr Vynnychenko, Kropivnitsky Ukraine

The article is devoted to the verification and deepening of the Vysochanski-Petunin inequality for the Simpson triangular distribution. The improvement of the Vysochansky-Petunin type ratings is carried out both in terms of the range of inequality (it is extended to all positive values) and in relation to the corrective constant 4/9.

Key words: Vysochansky-Petunin inequality, distribution density, absolutely continuous, distribution function, centering, normalization.

Проблема дослідження: поглиблення нерівності Височанського-Петуніна для абсолютно неперервних розподілів із заданого класу щільностей.

Аналіз досліджень і публікацій. Нерівність Чебишева [5] в теорії ймовірностей стверджує, що випадкова величина в основному приймає значення, близькі до свого середнього. А точніше, воно дає оцінку ймовірності того, що випадкова величина прийме значення, далеке від свого середнього. Нерівність Чебишева є наслідком нерівності Маркова і має вигляд:

$$P \quad \xi - M_\xi \quad \ge k\sigma_\xi \quad \le \frac{1}{k^2}, \ \ k > 0.$$

Уточненням нерівності Чебишева, або ще в деяких джерелах його називають нерівністю Чебишева-Бйенеме є нерівність Височанського-Петуніна.

Петунін Юрій Іванович (30 вересня 1937, Мічурінськ, Тамбовська область — 1 червня 2011, Київ) — український математик та кібернетик, доктор фізико-математичних наук (1968), професор кафедри обчислювальної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (1970). Член Американського математичного товариства. Серед його найбільш важливих результатів в математичній статистиці слід назвати суворе математичне обґрунтування відомого з часів Гаусса емпіричного правила 3σ для одномодальних розподілів [6]. Що стало вже класичним Нерівність Височанського - Петунін вирішило проблему, що стояла перед математиками більше 150 років.

Нерівність Височанського – Петунін має наступне формулювання:

$$P \quad \xi - M_\xi \quad \ge k\sigma_\xi \quad \le \frac{4}{9k^2}, \ \ k > \sqrt{\frac{8}{3}}$$

для уномодальних абсолютно неперервних величин, тобто для випадкових величин, щільності яких мають єдину точку локального максимуму.

Показано також, що в разі, коли $k \le \sqrt{\frac{8}{3}}$, існують несиметричні розподілу, для яких кордон $\frac{4}{9k^2}$ порушується, що потребує безумовно уточнення для деяких класичних ймовірнісних розподілів. Дана теорема підсилює нерівність Чебишева, включаючи в себе дріб $\frac{4}{9}$, за рахунок того, що накладається обмеження одномодальності на щільність розподілу випадкової величини.

Однак є цілком природним питанням є поглиблення відповідної нерівності в класі розподілів з щільностями певного аналітичного типу.

Мета статті: перевірити та поглибити нерівність Височанського-Петуніна для розподілу Сімпсона.

Нагадаємо, що випадкова величина ξ називається ***абсолютно неперервною***, якщо її функцію розподілу $F_\xi(x)$ можна подати у вигляді:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(x)\,dx;$$

де функція $p_\xi(x)$ називається ***щільністю розподілу*** випадкової величини ξ.

Випадкова величина має трикутний розподіл, або розподіл Сімпсона, на відрізку $[a;b]$ якшо абсолютно неперервна випадкова величина задана щільністю:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2}{b-a} - \frac{2|a+b-2x|}{(b-a)^2}, x \in [a;b] \\ 0, x \notin [a;b] \end{cases}$$

Потрібно відмітити, що на щільність розподілу накладається дві умови: умова невід'ємності майже скрізь і нормуюча умова.

Відомо [4], що розподіл Сімпсона є згорткою двох рівномірних на відрізку $[0{,}5a; 0{,}5b]$ розподілів.

Числові характеристики для розподіл Сімпсона мають наступний вигляд:

$$M_\xi = \frac{a+b}{2},$$

$$D_\xi = \frac{(b-a)^2}{24}$$

Зведемо нерівність Височанського – Петунін до еквівалентного виду для стандартизованих випадкових величин.

Нагадаємо, що під стандартизацію випадкової величини ξ ми розуміємо перехід до випадкової величини

$$\tau = \frac{\xi - M_\xi}{\sigma_\xi}.$$

Логіка відповідного переходу викликане тим, що виконуються рівності

$$M_\tau = 0,$$

$$D_\tau = 1$$

Оскільки виконується рівність

$$P\left(\left|\xi - M_\xi\right| \geq k\sigma_\xi\right) = P\left(\left|\frac{\xi - M_\xi}{\sigma_\xi}\right| \geq k\right) = P(|\tau| \geq k)$$

то для нерівності Височанського – Петунін

$$P\left(\left|\xi - M_\xi\right| \geq k\sigma_\xi\right) \leq \frac{4}{9k^2}, \ \ k > \sqrt{\frac{8}{3}}$$

маємо наступне еквівалентне представлення для стандартизованих випадкових величин:

$$P(|\tau| \geq k) \leq \frac{4}{9k^2}, \ \ k > \sqrt{\frac{8}{3}}$$

Стандартизуємо розподіл Сімпсона, для цього виведемо деякі формули:

$$F_\tau(x) = P(\tau < x) = P\left(\frac{\xi - M_\xi}{\sigma_\xi} < x\right) = P(\xi < \sigma_\xi x + M_\xi) = F_\xi(\sigma_\xi x + M_\xi)$$

Оскільки

$$F_\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} p_\xi(x)\,dx,$$

то

$$p_\xi(t) = (F_\xi(t))' \ (\text{м. с}).$$

Маємо:

$$p_\tau(t) = \sigma_\xi p_\xi(\sigma_\xi x + M_\xi).$$

Оскільки з

$$\sigma_\xi x + M_\xi \in [a; b],$$

$$\frac{b-a}{2\sqrt{6}}x + \frac{a+b}{2} \in [a; b],$$

отримаємо:

$$x \in [-\sqrt{6}; \sqrt{6}]$$

маємо наступну формулу для щільності стандартизованого розподілу Сімпсона :

$$p_\tau(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{|x|}{6}, x \in [-\sqrt{6}; \sqrt{6}] \\ 0, x \notin [-\sqrt{6}; \sqrt{6}] \end{cases}$$

Умова невід’ємності очевидно виконується причому скрізь.

За рахунок того, що щільність є парною функцією очевидно, що математичне сподівання рівне нулю:

$$M_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x)\, dx = 0.$$

Перевіримо, що дисперсія дійсно рівна 1, або теж саме з умовою $M_\xi = 0$:

$$M_{\xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_\xi(x)\, dx = 1$$

$$\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{x}{6}\right) x^2\, dx = 2\int_0^{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{x}{6}\right) x^2\, d(x) = 2\left(\frac{x^3}{3\sqrt{6}} - \frac{x^4}{24}\right)\Big|_0^{\sqrt{6}} = 1.$$

Потрібно відмітити, що обчислити $P(|\tau| \geq k)$ краще саме з геометричних міркувань, а саме остання ймовірність будучи рівною є по суті сумою площ заштрихованих трикутників:

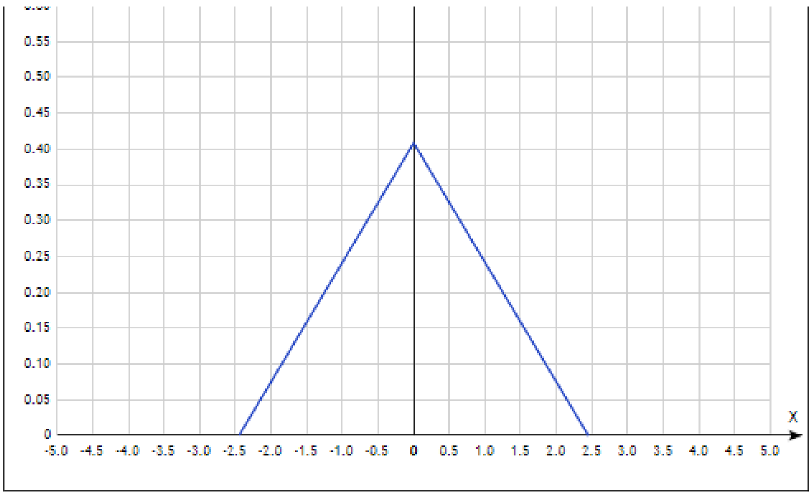

Рис 1. Графік $p_\tau(x)$.

Потрібно відмітити, що

$$\sqrt{6} > \sqrt{\frac{8}{3}}$$

і при $k \geq \sqrt{6}$ нерівність Височанського – Петуніна очевидно є правильною, адже

$$P(|\tau| \geq k) = 2\int_{k}^{+\infty} p_{\tau}(x)\,dx = 0.$$

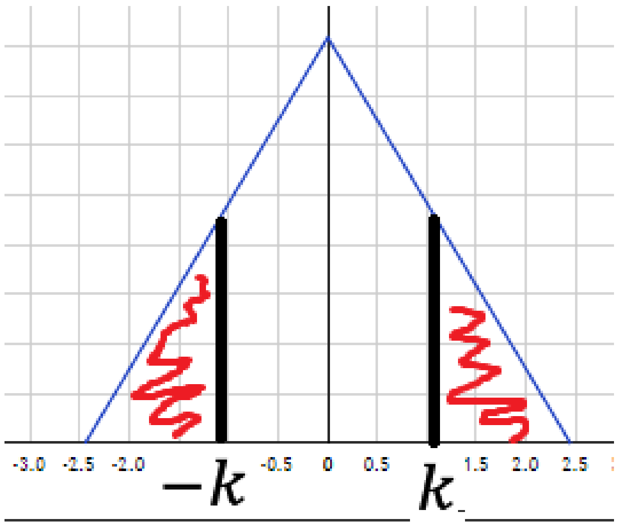

Рис 2. Геометрична інтерпретація $\int_{-\infty}^{-k} p_{\tau}(x)\,dx + \int_{k}^{+\infty} p_{\tau}(x)\,dx$

Отже, маємо:

$$P(|\tau| \geq k) = (\sqrt{6} - k)\left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{k}{6}\right) = \frac{(\sqrt{6} - k)^2}{6}$$

і потрібно проаналізувати нерівність:

$$(\sqrt{6} - k)^2 \leq \frac{4 * 6}{9k^2} = \frac{8}{3k^2}$$

Побудуємо графіки функцій

$$f(k) = (\sqrt{6} - k)^2$$

$$g(k) = \frac{8}{3k^2}$$

Також введемо функцію

$$h(k) = k^2(\sqrt{6} - k)^2$$

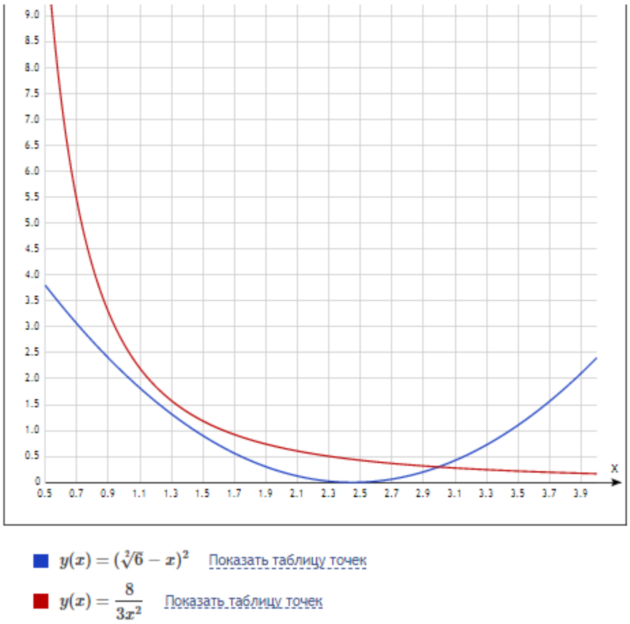

Рис 2.Графіки $f(k) = (\sqrt{6} - k)^2$ *та* $g(k) = \frac{8}{3k^2}$.

Графічно видно, що додатними розв'язками рівняння

$$\frac{8}{3k^2} = (\sqrt{6} - k)^2$$

є відповідно

$$k_1 \approx 2{,}93.$$

Потрібно відзначити, що

$$\sqrt{\frac{8}{3}} \approx 1{,}63, \quad \sqrt{6} \approx 2{,}449.$$

Отже, нерівність

$$\frac{1}{6}(\sqrt{6} - k)^2 < \frac{4}{9k^2}$$

виконується при $k \in (0; 2{,}93)$.

Таким чином нерівність Височанського – Петуніна виконується піднімемо питання про поглиблення нерівності.

Побудуємо графік функції

$$h(k) = k^2(\sqrt{6} - k)^2$$

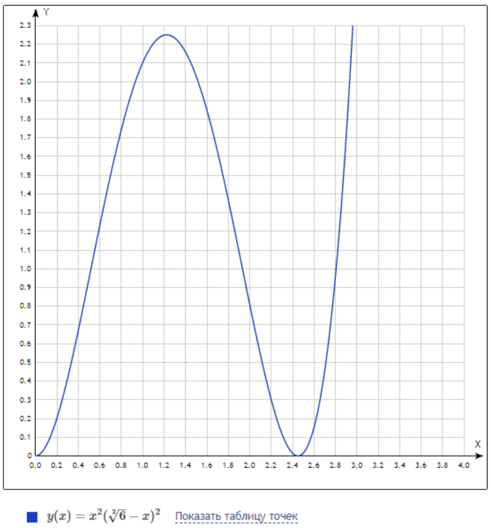

Рис 3.Графік $h(k) = k^2(\sqrt{6} - k)^2$.

Максимальне значення квадратного тричлена

$$s(k) = k(\sqrt{6} - k)$$

рівне $\frac{\sqrt{6}}{4}$, звідки маємо оцінку:

$$\frac{1}{6}h(k) \le \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

Таким чином, для розподілу Сімпсона нерівність Височанського – Петуніна має місце поглиблення :

$$P(|\xi - M_\xi| \ge k\sigma_\xi) \le \frac{1}{16k^2}, \quad k > 0.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Авраменко О.В. , Н.Г.Шевченко О.В. Maple 9 та 1230 інтегралів або Символьні обчислення у математичному аналізі. Частина 1. – Кіровоград: 2004. –117 с.
2. Бернулли Я. О законе больших чисел. – М.: Наука,1986. – 176 с.
3. Д. Ф. Высочанский, Ю. И. Петунин. Об одном неравенстве Гаусса для одновершинных распределений, – М.: ТВП, 1982, С. 339–341
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. –М.: Наука, 1988. – 448 с.
5. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа, 1988. – 439 с.
6. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. –120 с.